

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Ondřej Pejcha

### Dvojité gravitační mikročočky

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

2006

Dovoluji si poděkovat Mgr. Davidu Heyrovskému, Ph.D. za obětavou pomoc a cenné rady. Děkuji také své matce za podporu při studiu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 25. 5. 2006

Ondřej Pejcha

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>5</b>
1.1	Gravitační čočky . . . . .	5
1.2	Gravitační mikročočky . . . . .	5
1.3	Dvojité gravitační mikročočky . . . . .	7
1.4	Cíle práce . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Teorie gravitačních mikročoček</b>	<b>8</b>
2.1	Ohyb světla v poli dvou hmotných bodů . . . . .	8
2.2	Kritické a kaustické křivky . . . . .	11
2.3	Okrajové ztemnění . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Metody výpočtu světelných křivek</b>	<b>13</b>
3.1	Integrace přes zdroj . . . . .	13
3.2	Integrace Greenovou větou . . . . .	14
3.3	Ray shooting . . . . .	14
3.4	Integrace přes obrazy . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Srovnání metod a diskuse</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>23</b>
	<b>Literatura</b>	<b>24</b>

Název práce: Dvojité gravitační mikročochky  
Autor: Ondřej Pejcha  
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky  
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.  
e-mail vedoucího: heyrovsky@utf.mff.cuni.cz

Abstrakt: Dvojité gravitační mikročochky poskytují efektivní způsob, jak studovat rozložení intenzity záření na povrchu hvězd. V této práci jsme implementovali dvě metody výpočtu světelných křivek plošných zdrojů, jmenovitě střílení paprsků a integraci přes obrazy. Metody byly srovnány a testovány na pěti trajektoriích s různými polohami vůči kaustickým křivkám a jejich hrotům. Ve výpočtech jsme použili dva zdroje s odlišnými poloměry a lineárním okrajovým ztemněním. Provedli jsme rovněž detailní studium dvou kaustických přechodů. Naše výsledky ukazují, že integrace přes obrazy dosahuje výrazně vyšší celkové rychlosti než střílení paprsků pro všechny trajektorie a zdroje.

Klíčová slova: gravitační mikročochky, okrajové ztemnění, numerické metody

Title: Binary gravitational microlensing  
Author: Ondřej Pejcha  
Department: Institute of Theoretical Physics  
Supervisor: Mgr. David Heyrovský, Ph.D.  
Supervisor's e-mail address: heyrovsky@utf.mff.cuni.cz

Abstract: Binary gravitational microlensing provides an efficient way to study the surface brightness of stellar sources. In this work we have implemented two methods suitable for computation of light curves of resolved sources, namely ray shooting and image integration using a flood fill algorithm. The methods were tested and compared on five source trajectories variously positioned with respect to the caustic curves and their cusps. For our computations we used two linearly limb-darkened sources with different radii. Detailed study of two caustic crossings was also performed. Our results show that the flood fill method exhibits superior performance to ray shooting for all trajectories and sources.

Keywords: gravitational microlensing, limb darkening, numerical methods

# Kapitola 1

## Úvod

*Of course, there is no hope of observing this phenomenon directly.*

(Albert Einstein, 1936)

### 1.1 Gravitační čočky

Ohyb světla v gravitačním poli se studuje už více než 200 let. První výpočty úhlu ohybu z devatenáctého století byly založené na Newtonově gravitačním zákonu, ale experimentální ověření proběhlo až na základě výpočtů plynoucích z obecné teorie relativity (Einstein, 1916) během úplného zatmění Slunce v roce 1919. Pro ohyb světla v gravitačním poli objektů mimo Slunce se ujal termín *gravitační čočkování*.

Zwicky (1937) ukázal, že vzdálené galaxie mohou fungovat jako gravitační čočky a že jev může být pozorovatelný. První případ kvazaru zobrazeného galaxií objevili Walsh, Carswell a Weymann (1979) a první obrazy plošných zdrojů, galaxií, zobrazených kupou galaxií pozorovali Lynds a Petrosian (1989). V současné době je známo více než 100 gravitačních čoček.

Podrobnou historii gravitačního čočkování lze nalézt například v knize Schneider a kol. (1992).

### 1.2 Gravitační mikročočky

V roce 1936 publikoval Albert Einstein myšlenku, že jako gravitační čočka by mohla fungovat běžná hvězda. Einstein ale pokládal efekt za natolik málo

pravděpodobný (viz citát v úvodu kapitoly), že ho nebude možné přímo pozorovat.

Na přelomu sedmdesátých a osmdesátých let se ukázalo (např. Chang a Refsdal, 1979), že i když hvězdy v halu čočkující galaxie nedokáží vytvořit rozlišitelné obrazy vzdáleného kvazaru, jejich vlastní pohyb způsobí časovou proměnnost součtu jasnosti dílčích obrazů a tím i celého zobrazeného kvazaru. Tento jev byl nazván *mikročočkování*. Dnes se toto označení používá pro jakékoliv gravitační čočkování, při kterém nemůžeme rozlišit jednotlivé obrazy, ale můžeme pozorovat časové změny jasnosti.

Paczynski (1986) zkoumal možnost mikročočkování hvězd ve Velkém Magellanově mračnu (LMC) baryonickou temnou hmotou v kompaktních objektech v halu Galaxie a dospěl k výsledné pravděpodobnosti řádu  $10^{-6}$ . Sledujeme-li tedy najednou milion hvězd v LMC, bude přibližně jedna z nich zjasněná gravitačním mikročočkováním. Takovéto objekty můžeme odhalit díky časové závislosti jasnosti způsobené vzájemným vlastním pohybem čočkované hvězdy a čočkujícího objektu. Tuto závislost nazýváme *světelnou křivkou*. Objekty z galaktického hala způsobující čočkování byly nazvány MAssive Compact Halo Objects (MACHOs).

Technologie potřebná k hledání mikročoček začala být k dispozici už za několik let po Paczynského práci, což nastartovalo na počátku devadesátých let monitorovací projekty OGLE<sup>1</sup>, EROS<sup>2</sup>, MACHO<sup>3</sup> a DUO<sup>4</sup>. V letech 1992 a 1993 ohlásily všechny skupiny první kandidáty na mikročočky, kterých je v současné době známo už téměř tři tisíce.

Více než čtrnáct let fungování mikročočkových monitorovacích projektů odhalilo jako vedlejší přínos mnoho nových poznatků v různých oblastech astronomie, především výzkumu proměnných hvězd. Hlavním výsledkem mikročočkových monitorovacích projektů je zjištění, že kompaktní baryonická tělesa s hmotností  $10^{-7} - 1 M_{\odot}$  (Afonso a kol., 2003) tvoří většinu galaktické temné hmoty. O ní se v současnosti většinou předpokládá, že se skládá z exotických částic (Evans, 2003).

---

<sup>1</sup>Optical Gravitational Lensing Experiment, <http://www.astro.uw.edu.pl/~ogle/>

<sup>2</sup>Expérience pour la Recherche d'Objets Sombres, <http://eros.in2p3.fr/>

<sup>3</sup>MAssive Compact Halo Objects, <http://wwwmacho.mcmaster.ca/>

<sup>4</sup>Disk Unseen Objects

## 1.3 Dvojité gravitační mikročočky

Speciální případ mikročočkování nastává v situaci, kdy čočku tvoří dva hmotné objekty ve stejné vzdálenosti. Nezanedbatelná část hvězdné populace se vyskytuje ve vícenásobných systémech, takže by určitá část pozorovaných událostí měla být způsobena dvojitými čočkami. Mao a Paczyński (1991) odhadli tuto část na přibližně 10%. Světelné křivky dvojitých gravitačních mikročoček vykazují specifický tvar odlišný od jednoduchých čoček (viz Kapitola 2), což v případě dostatečně hustého pokrytí světelné křivky umožňuje jejich snadnou identifikaci.

První případ dvojité mikročočky publikovali Udalski a kol. (1994) a v současnosti je známo několik desítek událostí vysvětlovaných dvojitou mikročočkou. Například Thomas a kol. (2005) analyzovali 528 mikročoček z dat projektu MACHO v letech 1993–1999 a našli 17 dvojitých mikročoček a 24 možných dvojitých mikročoček, což odpovídá zastoupení 3–8%.

Díky dvojité gravitační mikročočce se poprvé v historii podařilo určit hmotnost čočkujícího objektu (An a kol., 2002) nebo nalézt exoplanetu o hmotnosti srovnatelné se Zemí (Beaulieu a kol., 2006).

Využití se dvojité mikročočky dočkaly i při určování rozložení intenzity záření na povrchu zdroje. V geometrii dvojitých mikročoček se totiž vyskytují tzv. kaustické křivky (podrobněji v Kapitole 2), na kterých se dosahuje formálně nekonečného zjasnění. Přechází-li plošný zdroj přes kaustickou křivku, jsou některé části zjasněny výrazně více než ostatní a ze světelné křivky je možné rekonstruovat plošný jas zdroje. Většinou bývají čočkou zobrazeny hvězdy, u nichž plošnou jasnost ovlivňuje *okrajové ztemnění*. Záření z centra kotouče a z jeho okrajů k nám přichází z různé hloubky hvězdné fotosféry, kde jsou i jiné teploty a tudíž i jiná jasnost. Kaustické přechody nám tak umožňují přímo testovat modely hvězdných atmosfér na jiných hvězdách než Slunce.

## 1.4 Cíle práce

Cílem práce je implementovat, vyzkoušet a porovnat různé metody výpočtu světelných křivek dvojitých gravitačních mikročoček pro případ plošného hvězdného zdroje s obecným rozložením jasnosti. Metody budou srovnány jak z hlediska vhodnosti pro zdroj s obecným rozložením jasnosti, tak z pohledu výpočetní náročnosti měřené především procesorovým časem a využitím paměti.

# Kapitola 2

## Teorie gravitačních mikročoček

### 2.1 Ohyb světla v poli dvou hmotných bodů

Nechť se ve vzdálenosti  $D_{OL}$  od pozorovatele nachází dva hmotné body o hmotnostech  $m_A$  a  $m_B$  a celkové hmotnosti  $M$ . Pro polohy obrazů v rovině kolmé na spojnici pozorovatel–čočka (viz Obrázek 2.1) zavedeme úhlový souřadný systém  $(\theta_1, \theta_2)$  tak, že osa  $\theta_1$  prochází hmotnými body a počátek souřadnic zvolíme v těžišti. Stejným způsobem zvolíme i úhlové souřadnice  $(\beta_1, \beta_2)$  pro polohu zdroje. Z „bočního pohledu“ na Obrázku 2.2 plyne

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{LS}}{D_{OS}} \vec{\alpha}. \quad (2.1)$$

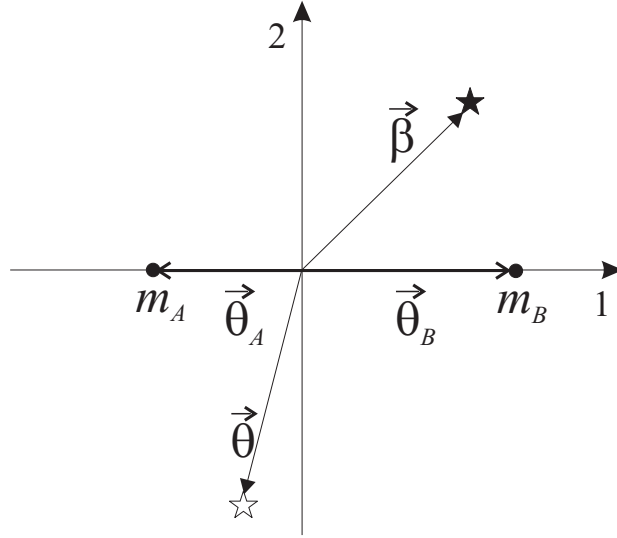
Uvažujeme-li paprsky procházející ve vzdálenosti podstatně větší, než je Schwarzschildův poloměr obou hmotných bodů, bude úhel odklonu  $\vec{\alpha}$  dán složením úhlů odklonů od obou čoček

$$\vec{\alpha} = \frac{1}{D_{OL}} \frac{4GM}{c^2} \left( \mu_A \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}_A}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}_A|^2} + \mu_B \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}_B}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}_B|^2} \right), \quad (2.2)$$

kde  $G$  je gravitační konstanta,  $c$  rychlost světla,  $\vec{\theta}_A$  a  $\vec{\theta}_B$  úhly, pod kterými vidí pozorovatel hmotné body,  $\mu_A = m_A/M$  a  $\mu_B = m_B/M$ .

Definujeme nové úhlové souřadnice  $\vec{x} = \vec{\theta}/\theta_E$  a  $\vec{y} = \vec{\beta}/\theta_E$ , kde  $\theta_E$  představuje tzv. Einsteinův úhel definovaný vztahem

$$\theta_E = \sqrt{\frac{D_{LS}}{D_{OS}D_{OL}} \frac{4GM}{c^2}}. \quad (2.3)$$



Obrázek 2.1: Souřadnice použité pro popis poloh obrazů (prázdná hvězdička) a zdroje (plná hvězdička).

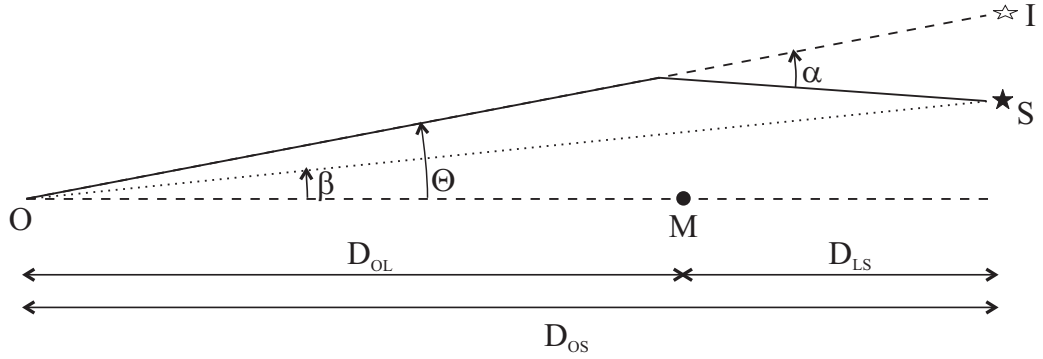
V případě typické galaktické mikročocky ( $M \sim 1 M_{\odot}$ ,  $D_{OL} \sim 6$  kpc) dosahuje  $\theta_E$  řádu několika tisícín úhlové vteřiny, což neumožňuje optickým teleskopům rozlišit jednotlivé obrazy (rozlišení Hubbleova kosmického dalekohledu je maximálně  $\sim 0,1''$ ). Typické vzájemné tangenciální rychlosti hvězd v Galaxii dávají dobu přechodu  $t_E$  zdroje přes úsečku o délce  $\theta_E$  (a tím i časovou škálu trvání úkazu) v řádu desítek až stovek dnů.

V nových souřadnicích přejde čocková rovnice (2.1) do jednoduchého tvaru

$$\vec{y} = \vec{x} - \mu_A \frac{\vec{x} - \vec{x}_A}{|\vec{x} - \vec{x}_A|^2} - \mu_B \frac{\vec{x} - \vec{x}_B}{|\vec{x} - \vec{x}_B|^2}, \quad (2.4)$$

kde  $\vec{x}_A = \vec{\theta}_A/\theta_E$  a  $\vec{x}_B = \vec{\theta}_B/\theta_E$ . Z použitých konvencí plyne  $\mu_A + \mu_B = 1$ ,  $\vec{x}_A = (-\mu_B d, 0)$  a  $\vec{x}_B = (\mu_A d, 0)$ , kde  $d$  je vzdálenost mezi hmotnými body v souřadnicích  $\vec{x}$ .

Rovnice (2.4) popisuje závislost polohy zdroje na poloze obrazu, ale pro praktické použití nás zajímá opačná závislost. Potřebovali bychom tedy čockovou rovnici invertovat. Za tímto účelem zavedeme v rovině zdroje a čocky komplexní souřadnice  $z = x_1 + ix_2$  a  $\xi = y_1 + iy_2$ . Předchozí konvence zůstávají v platnosti, konkrétně jednotková úsečka má délku  $\theta_E$  a polohám hmotných bodů  $x_A$  a  $x_B$  odpovídají čísla  $z_A = -\mu_B d$  a  $z_B = \mu_A d$ .



Obrázek 2.2: Geometrie gravitační čočky. Paprsek vychází ze zdroje (S), láme se v gravitačním poli čočky (M) a dopadá do detektoru pozorovatele (O), který vidí obraz (I). Převzato z Mollerach a Roulet (2002, str. 30).

V tomto přepisu vypadá rovnice (2.4) následovně

$$\xi = z - \frac{\mu_A}{\bar{z} - z_A} - \frac{\mu_B}{\bar{z} - z_B}, \quad (2.5)$$

kde pruh značí komplexní sdružení. Provedeme-li komplexní sdružení celé rovnice a dosadíme do (2.5) za  $\bar{z}$ , dostaneme po několika úpravách polynom pátého stupně v proměnné  $z$  s komplexními koeficienty

$$\sum_{i=0}^5 a_i z^i = 0. \quad (2.6)$$

Koeficienty  $a_i$  závisí pouze na poloze zdroje, hmotných bodů a jejich hmotnostech  $m_A$  a  $m_B$ , ale kvůli jejich značné délce neuvádím explicitně celý výraz. Kořeny polynomu udávají polohy obrazů. Vzhledem k užitým úpravám je nutné vždy zkontrolovat získané polohy obrazů s rovnicí (2.5). Kořeny polynomu pátého stupně je nutno hledat numerickými prostředky, což zneumožňuje provést analytickou inverzi čočkové rovnice.

Vzhledem k tomu, že gravitační čočkování zachovává plošnou jasnost zdroje (například Mollerach a Roulet, 2002, str. 34), udává zjasnění  $A_0$  bodového zdroje vztah

$$A_0(\vec{y}) = \sum_j \frac{1}{|\det J_j|}, \quad (2.7)$$

kde  $J_j$  je Jacobiho matice zobrazení (2.4),  $J(\vec{x}) = \partial\vec{y}/\partial\vec{x}$ , vyčíslená v  $j$ -tém obrazu získaném řešením rovnice (2.6) pro polohu zdroje  $\vec{y}$ . Derivováním

rovnice (2.4) získáme výsledný vztah pro jakobián

$$\det J = 1 - \left( \frac{\mu_A}{|\vec{x} - \vec{x}_A|^2} + \frac{\mu_B}{|\vec{x} - \vec{x}_B|^2} \right)^2 + 4\mu_A\mu_B \frac{|(\vec{x} - \vec{x}_A) \times (\vec{x} - \vec{x}_B)|^2}{|\vec{x} - \vec{x}_A|^4 |\vec{x} - \vec{x}_B|^4}. \quad (2.8)$$

Nechť je  $I_S(\vec{y})$  plošná jasnost (intenzita) plošného zdroje a  $I_I(\vec{x}) = I_S(\vec{y}(\vec{x}))$  intenzita obrazů. Celkové zjasnění plošného zdroje je dáno

$$A = \frac{\int_{\Sigma_I} I_I(\vec{x}) dx_1 dx_2}{\int_{\Sigma_S} I_S(\vec{y}) dy_1 dy_2}, \quad (2.9)$$

kde  $\Sigma_S$  je oblast pokrytá zdrojem a  $\Sigma_I$  oblast pokrytá obrazem. S využitím vztahu (2.7) dostaneme integraci jen v souřadnicích zdroje

$$A(\vec{y}) = \frac{\int_{\Sigma_S} A_0(\vec{y} - \vec{y}') I_S(\vec{y}') dy'_1 dy'_2}{\int_{\Sigma_S} I_S(\vec{y}') dy'_1 dy'_2}, \quad (2.10)$$

kde  $\vec{y}$  značí polohu středu zdroje.

Pohyb zdroje lze ve většině případů považovat za rovnoměrný přímočarý, popsaný úhlem  $\varphi$  sevřeným vektorem rychlosti a osou  $y_1$  a minimální vzdáleností od těžiště  $u$ . Parametrem této přímky je čas  $t$ . Několik případů nepřímkových trajektorií analyzuje například Jaroszyński (2005).

## 2.2 Kritické a kaustické křivky

Z rovnice (2.8) vidíme, že pro některé hodnoty  $\vec{x}$  se determinant nuluje a zjasnění dané vztahem (2.7) dosahuje formálně nekonečné hodnoty. Pro nebodový zdroj je samozřejmě zjasnění podle vztahu (2.9) konečné.

Body, pro které  $\det J = 0$ , tvoří *kritické křivky*, které se po zobrazení čočkovou rovnicí (2.4) nazývají *kaustické křivky*. V závislosti na vzdálenosti čoček  $d$  mají kritické (a také kaustické) křivky více částí. Pro  $d$  menší než řešení rovnice  $27\mu_A\mu_B d^8 = (1 - d^4)^3$  jsou trojdílné, pro  $d$  větší než  $(\mu_A^{1/3} + \mu_B^{1/3})^{3/2}$  dvojdílné a v ostatních případech jednodílné (Schneider a kol., 1992, str. 264). Implicitní rovnice v polárních souřadnicích popisující kritické a kaustické křivky a detailní rozbor jejich tvarů podali Schneider a Weiß (1986).

Lze ukázat, že v případě dvojité mikročočky má zdroj buď tři nebo pět obrazů. Změna počtu obrazů nastává při přechodu zdroje přes kaustickou

křivku. Uvnitř křivky je počet obrazů vyšší, což se ve světelné křivce projeví prudkou změnou jasnosti. Přechod zdroje přes kaustickou křivku trvá hodiny až desítky hodin, takže zachycení tohoto úkazu vyžaduje spolupráci mezi observatořemi rozmístěnými na různých zeměpisných délkách. Mezi projekty zabývající se fotometrií mikročoček s vysokým časovým rozlišením patří například PLANET<sup>1</sup>, MPS<sup>2</sup> a  $\mu$ FUN<sup>3</sup>.

## 2.3 Okrajové ztemnění

Rozložení intenzity záření na povrchu hvězd (pro danou vlnovou délku  $\lambda$ ) se většinou popisuje pomocí radiálně symetrické funkce  $I_\lambda(r)$ , kde  $r$  je radiální vzdálenost od středu měřená v poloměrech kotoučku hvězdy. Okrajové ztemnění hvězd se aproximuje buď lineárním modelem

$$D_\lambda(r) = I_\lambda(r)/I_\lambda(0) = 1 - x_\lambda(1 - \sqrt{1 - r^2}) \quad (2.11)$$

nebo některým z nelineárních modelů, například logaritmickým

$$D_\lambda(r) = 1 - x_\lambda(1 - \sqrt{1 - r^2}) - y_\lambda\sqrt{1 - r^2} \ln \sqrt{1 - r^2} \quad (2.12)$$

nebo odmocninným

$$D_\lambda(r) = 1 - x_\lambda(1 - \sqrt{1 - r^2}) - y_\lambda(1 - \sqrt[4]{1 - r^2}). \quad (2.13)$$

Koeficienty  $x_\lambda$  a  $y_\lambda$  uvádí pro hvězdy různých efektivních teplot, povrchových zrychlení a pro různá spektrální pásma například Van Hamme (1993).

Všechny zmíněné analytické modely nepostihují dostatečně přesně okrajové ztemnění u skutečných hvězd, které lze lépe popsat pomocí PCA analýzy modelů hvězdných atmosfér (Heyrovský, 2003).

---

<sup>1</sup>Probing Lens Anomalies NETwork, <http://planet.iap.fr/>

<sup>2</sup>Microensing Planet Search, <http://bustard.phys.nd.edu/MPS/index.html>

<sup>3</sup>Microensing Follow-Up Network, <http://www.astronomy.ohio-state.edu/~microfun/>

# Kapitola 3

## Metody výpočtu světelných křivek

Dvojité gravitační mikročočky představují poměrně speciální případ gravitačních mikročoček s obecným rozložením hmotnosti a ne všechny metody vyvinuté jako účinné pro jednu speciální situaci musí být vhodné pro jinou. Například pro bodový zdroj a dvojitou čočku nalezneme obrazy pomocí inverze rovnice (2.5). Z pěti kořenů vyprodukovaných polynomem (2.6) se vyberou ty, které po dosazení do čočkové rovnice (2.5) odpovídají poloze zdroje. Pro ty se spočítá zjasnění vztahem (2.7) a sečtou se. Nicméně v případě obecného rozložení intenzity na povrchu nebodového zdroje musíme postupovat jinak.

### 3.1 Integrace přes zdroj

V této nejstarší metodě se integruje vztah (2.10). Kotouček hvězdy se rozdělí na elementy dostatečně malé, že je lze pokládat za body. Zjasnění získaná metodou pro bodový zdroj se po vynásobení intenzitou v daném místě povrchu a velikostí integrační plošky sečtou.

Problémy s touto metodou nastávají poblíž kaustických křivek, pro něž vztah (2.8) diverguje. Metoda způsobuje, že pro konečně velké elementy může být vypočítané zjasnění natolik velké, že i v součinu s malou velikostí plošky dá nesmyslně velkou hodnotu. Tento problém lze řešit zvětšováním počtu elementů, vhodnou modifikací vztahu pro zjasnění či dodatečným vyhlazením výsledné křivky.

Tuto metodu jsem dále nezkoumal, protože je navíc na první pohled neefektivní kvůli opakovanému hledání kořenů polynomu (2.6).

## 3.2 Integrace Greenovou větou

Ve vztahu pro zjasnění plošného zdroje (2.9) dokážeme jmenovatel spočítat snadno, ale vyčíslit plošný integrál v čitateli nemusí být tak jednoduché. Využijeme Greenovy věty, která říká, že máme-li funkce  $P(x_1, x_2)$  a  $Q(x_1, x_2)$  spojitě i se svými prvními parciálními derivacemi na oblasti  $\Omega$ , pak platí

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} (P dx_1 + Q dx_2), \quad (3.1)$$

kde  $\partial\Omega$  je hranice oblasti  $\Omega$ . Plošný integrál v čitateli rovnice (2.9) lze při znalosti funkcí  $P$  a  $Q$  převést na křivkový. Explicitní tvar funkcí  $P$  a  $Q$  pro uniformní a lineární okrajové ztemnění uvádí Dominik (1998) s poznámkou, že výpočet členů typu  $(1 - r^2)^n$  je velmi podobný.

Možnost převodu dvourozměrné integrace na jednorozměrnou je velice lákavá, ale pro zdroj s obecným rozložením intenzity (daným například tabelovanými hodnotami nebo s přítomností skvrn na hvězdě) nemusí být snadné či možné najít funkce  $P$  a  $Q$ . Z tohoto důvodu jsem se popsanou metodou nezabýval.

## 3.3 Ray shooting

Další způsob výpočtu světelné křivky spočívá v použití metody Monte Carlo. Z náhodných míst v  $\vec{x}$  „střelíme“ pomocí rovnice (2.4) zpětné paprsky, které necháváme akumulovat na mřížce. Získáme tak dvourozměrnou mapu zjasnění (2.7) v proměnné  $\vec{y}$ . Celkové zjasnění obecného zdroje v daném místě lze získat plošnou integrací součinu funkce popisující intenzitu zdroje a zjasnění daného dvourozměrnou mapou.

Výhodou této metody je jednoduchost a to i v případě čoček tvořených  $N$  hmotnými body. Poslání každého paprsku se totiž řídí rovnicí (2.4), která je snadná na výpočet, takže i současné běžné stolní počítače dokáží vygenerovat  $\sim 10^9$  paprsků v řádu desítek minut.

Implementace této metody je velmi přímočará. Počáteční polohy paprsků jsem generoval náhodně pomocí procedury `ran3` z Press a kol. (2002, str. 283) a po zobrazení rovnicí (2.4) byl paprsek bilineární interpolací rozdělen mezi čtyři sousední pixely. Výpočet plošného integrálu jsem prováděl pro malé zdroje po jednotlivých pixelech pomocí dvourozměrné Gaussovy kvadratury podle postupu z knihy Press a kol. (2002, str. 164). U kotoučků velkých hvězd zasahujících přes mnoho pixelů stačí vynásobit zjasnění v daném pixelu hodnotou intenzity hvězdy.

### 3.4 Integrace přes obrazy

Dalším používaným způsobem výpočtu světelných křivek je integrace přes plochu obrazů podle vztahu (2.9). Vyjdeme z toho, že obrazy souvislých plošných zdrojů tvoří souvislé plochy, takže známe-li souřadnice alespoň jednoho bodu z každého obrazu (například řešením rovnice (2.6)), můžeme zkoušením okolních bodů pomocí rovnice (2.4) postupně zjistit celkové obrazy a vypočítat tak plošný integrál v rovnici (2.9).

Kořeny rovnice (2.6) jsem hledal pomocí Laguerrovy metody implementované v proceduře `zroots` z knihy Press a kol. (2002, str. 374). Výše popsané procházení ohraničené plochy z jednoho počátečního bodu je známo z počítačové grafiky jako „flood fill“ a existuje pro něj několik různých efektivních algoritmů. Pro potřeby výpočtu plošného integrálu musíme zabezpečit, aby byl každý pixel patřící do nějakého obrazu navštíven právě jednou a aby se minimalizovalo či úplně odstranilo rekurzivní volání řídicí procedury. Z algoritmů popsaných v Shaw (2004) jsem vybral a mírně modifikoval rekurzivní scan line, který vyplňuje obrazy postupně po řádcích. Algoritmus jsem dovybavil datovou strukturou tvořenou polem reprezentujícím diskretizovanou osu  $x_2$ , jehož každým prvkem je lineární spojový seznam. Prvky tohoto seznamu jsou rozsahy obrazů v ose  $x_1$  pro souřadnici  $x_2$  danou pozicí v poli. Tato koncepce má kromě malého množství obsazené operační paměti výhodu i v tom, že při rekurzivním volání lze naráz vyloučit celý navštívený interval pixelů v jednom řádku a výrazně tak snížit hloubku rekurze. Z této datové struktury lze pak snadno získat i tvar všech obrazů plošného zdroje, ovšem samozřejmě bez vah daných intenzitou zdroje.

Pokud se část plošného zdroje ocitne uvnitř kaustické křivky, zatímco zbytek se nachází vně, objeví se dva nové obrazy, které jsou většinou oddělené od zbylých tří. Takovou situaci můžeme detekovat třemi způsoby:

- Při přechodu bodu přes kaustickou křivku mění jakobián daný vztahem (2.8) znaménko. Toho lze využít tak, že diskretizujeme obvod kotoučku hvězdy, pro každý bod najdeme polohy jeho obrazů a zkoumáme znaménko jakobiánu. Vzhledem k nutnosti hledat kořeny polynomu (2.6) a následně počítat determinant je tato metoda velmi neefektivní.
- Vztah  $\det J = 0$  pro kritické křivky lze po přepsání do polárních souřadnic vyjádřit jako polynom osmého stupně v radiální vzdálenosti a druhého stupně v kosinu polárního úhlu. Postupnou změnou polárního úhlu a řešením pro radiální vzdálenost aproximujeme kritické

a kaustické křivky polygonem. Po diskretizaci obvodu kotoučku hvězdy lze použít některý ze známých algoritmů pro zjištění, zda se bod nachází uvnitř polygonu. Tento způsob nevyžaduje náročné výpočty, ale při vyšším počtu bodů na kaustické křivce trpí algoritmy detekce bodu uvnitř polygonu numerickou nestabilitou.

- Aproximace kritických a kaustických křivek polygonem jako v předchozím bodě umožňuje detekovat přechod zdroje přes kaustickou křivku i jiným způsobem. Polygon definuje sadu úseček, pro něž lze analyticky spočítat průsečík s hranicí kruhové hvězdy. Užitím několika optimalizací lze dosáhnout přesně stejné rychlosti jako v předchozím bodu, ale bez problémů s numerickou nestabilitou. Tuto metodu jsem použil pro detekci přechodu zdroje přes kaustickou křivku.

# Kapitola 4

## Srovnání metod a diskuse

Pro testování metod „ray shooting“ a „flood fill“ jsem zvolil dvojitou gravitační mikročočku s poměrem hmotností  $q = m_A/m_B = 0,25$  a vzdáleností mezi hmotnými body  $d = 0,7$ . Kaustické křivky tohoto systému jsou tedy trojdílné a ukazuje je Obrázek 4.1. Tento Obrázek znázorňuje i pět vybraných testovacích trajektorií. Dvě z nich jsou situovány dostatečně daleko od kaustických křivek, dvě přecházejí přes „hroty“ (cusps) kaustických křivek a jedna kaustickou křivku protíná.

Pro testovací účely jsem zvolil dva zdroje s okrajovým ztemněním řízeným lineárním zákonem (2.11) a koeficientem  $x_\lambda = 0,483$  odpovídajícím hvězdě o efektivní teplotě 6000 K, povrchovém zrychlení  $\log g = 3,0$  a filtru  $R$  (červená oblast spektra) podle tabulky Van Hamme (1993). Poloměry zdrojů byly  $\rho_* = 0,02$  (v násobcích  $\theta_E$ ) a  $\rho_* = 0,04$ . Celkové světelné křivky jsou vykresleny na Obrázku 4.2 a detaily dvou kaustických přechodů na Obrázku 4.3.

Pro srovnání kvality vypočtených světelných křivek  $f(t)$  jsem zvolil parametr  $\sigma$  definovaný vztahem

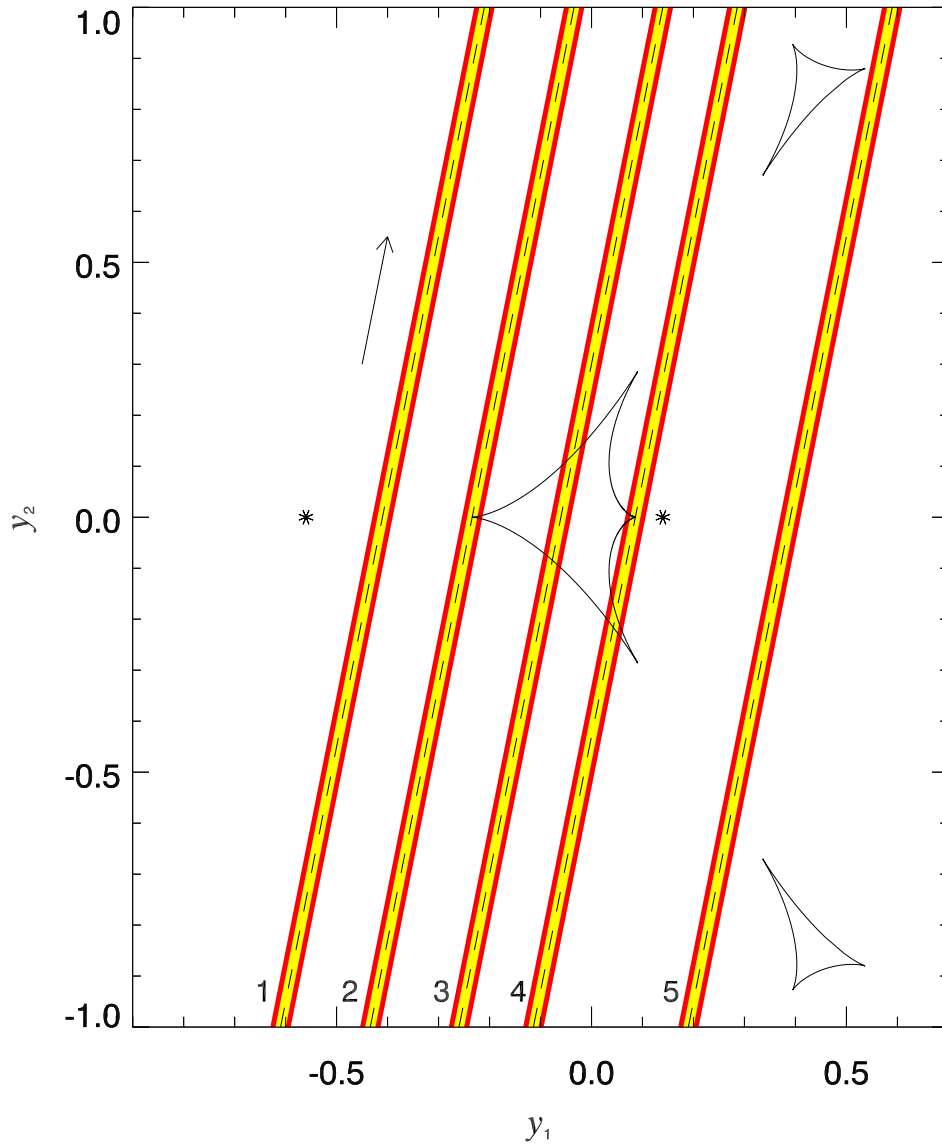
$$\sigma^2 = \frac{\int [f(t) - m(t)]^2 dt}{\int m^2(t) dt}, \quad (4.1)$$

kde  $m(t)$  je referenční světelná křivka se zanedbatelným numerickým šumem. Dalším parametrem byla odchylka vypočtené a referenční křivky

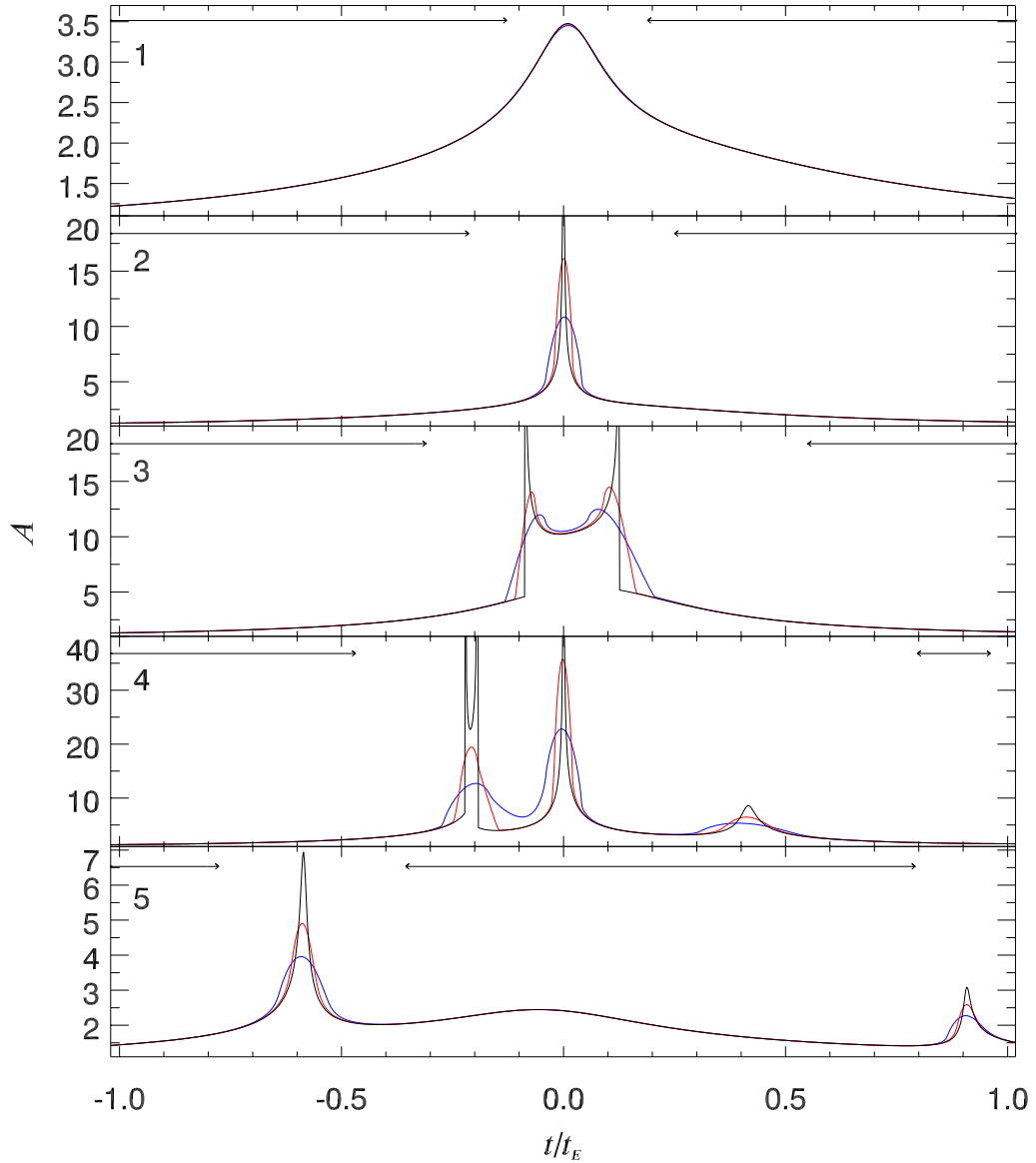
$$\delta(t) = \frac{|f(t) - m(t)|}{m(t)}, \quad (4.2)$$

respektive její maximální hodnota

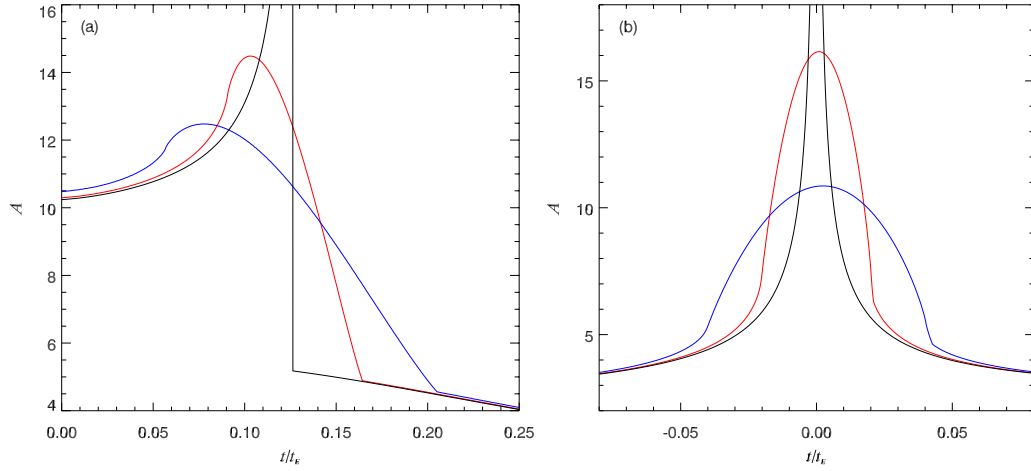
$$\delta_{max} = \max_t \delta(t). \quad (4.3)$$



Obrázek 4.1: Vybrané testovací trajektorie pro dvojitou mikročočku s parametry  $q = m_A/m_B = 0,25$  a  $d = 0,7$ . Uzavřené křivky značí kaustiky, červené pásy představují plochu postupně pokrytou kruhovými zdroji s  $\rho_* = 0,04$ , přes které jsou vykresleny žluté pásy pro zdroje s  $\rho_* = 0,02$  a přerušované čáry jako trajektorie středů. Hvězdičky udávají polohy hmotných bodů  $m_A$  (vlevo) a  $m_B$  (vpravo). Šipka označuje směr pohybu zdrojů.



Obrázek 4.2: Světelné křivky pro testovací trajektorie z Obrázku 4.1. Černé čáry odpovídají bodovým zdrojům, červené zdrojům s  $\rho_* = 0,02$  a modré s  $\rho_* = 0,04$ . Čas  $t = 0$  přísluší okamžiku, v němž pro střed zdroje platí  $y_2 = 0$  (viz Obrázek 4.1). Vodorovné úsečky v horních částech panelů označují oblasti, pro něž je odchylka  $\delta(t)$  mezi křivkami pro bodový zdroj a zdroj s  $\rho_* = 0,04$  menší než  $0,002$ .



Obrázek 4.3: Detaily kaustických přechodů. Panel (a) odpovídá křivce 3 a panel (b) křivce 2 z Obrázku 4.2. Význam čar je stejný jako v Obrázku 4.2.

Z důvodů zřejmých níže jsem referenční světelnou křivku  $m(t)$  počítal pomocí integrace přes obrazy. Výkonnostní parametry testovaných metod jsem fixoval tak, aby  $\sigma \cong 0,002$ , což odpovídá typickým chybám kvalitních fotometrických měření. Světelnou křivku jsem počítal v 1000 bodech odpovídajících  $\Delta t/t_E = 2,04 \cdot 10^{-3}$  pro Obrázek 4.2,  $\Delta t/t_E = 3,10 \cdot 10^{-4}$  pro Obrázek 4.3a a  $\Delta t/t_E = 2,10 \cdot 10^{-4}$  pro Obrázek 4.3b. Výpočetní rychlost jsem měřil na notebooku s procesorem Celeron 2.4 GHz, 500 MB operační paměti a kompilátorem GCC. Výsledky měření jsou uvedeny v Tabulce 4.1 pro celkové křivky znázorněné na Obrázku 4.2 a v Tabulce 4.2 pro detaily světelných křivek z Obrázku 4.3. Doby výpočtu uvedené v Tabulce 4.1 nezahrnují čas strávený na přípravných činnostech souvisejících s konfigurací čočky. Konkrétně u střílení paprsků není zahrnuta doba nutná k vytvoření mapy zjasnění (2.7), která pro zdroj s  $\rho_* = 0,02$  činila 2230 sekund ( $5 \cdot 10^9$  paprsků, velikost pixelu  $2,44 \cdot 10^{-4}$ ) a pro zdroj s  $\rho_* = 0,04$  činila 1270 sekund ( $3 \cdot 10^9$  paprsků, velikost pixelu  $3,67 \cdot 10^{-4}$ ). U integrace přes obrazy je třeba přičíst asi 1 sekundu na aproximaci kaustických křivek polygonem o přibližně 1300 vrcholech.

Z tabulek je vidět, že při samotné integraci se rychlosti obou metod výrazně neliší. Delší časy pro ray shooting a zdroj s  $\rho_* = 0,04$  způsobuje vyšší počet pixelů, přes které je třeba integrovat. Spolehlivost metod (charakterizovaná parametrem  $\delta_{max}$ ) se snižuje pro trajektorie protínající kaus-

tické křivky. Příčina tkví v tom, že u střílení paprsků dochází při výpočtu mapy zjasnění k rozmazání kaustických křivek a u integrace přes obrazy jsou kaustické křivky nahrazeny polygonem.

Pro objektivní srovnání metod je nutné vzít do úvahy pro každou metodu kromě údajů z tabulek také čas strávený na přípravných pracích. V tomto ohledu ray shooting značně brzdí nároky na výpočet mapy zjasnění, které odpadají u integrace přes obrazy. Celkově je tedy integrace přes obrazy výrazně rychlejší. Střílení paprsků může být výhodnější v případě, kdy potřebujeme vytvořit mnoho různých světelných křivek pro jednu konfiguraci čočky nebo v případě čočky tvořené obecným rozložením hmoty, pro kterou je obtížné zjišťování poloh obrazů a použití integrace přes obrazy nemusí tedy být jednoduché či dokonce možné. V poslední době se objevilo několik vylepšení metody střílení paprsků (např. Rattenbury a kol., 2002), která dokáže urychlit výpočet asi o jeden řád. I v tomto případě je ray shooting přibližně o dva řády pomalejší než integrace přes obrazy. Z těchto důvodů byly referenční křivky  $m(t)$  počítány integrací přes obrazy s velikostí pixelu přibližně  $5 \cdot 10^{-5}$  a tím pádem i zanedbatelným numerickým šumem.

Z Obrázku 4.2 můžeme vyčíst, že pro části trajektorií v dostatečné vzdálenosti od kaustických křivek lze bez ztráty přesnosti aproximovat plošný zdroj bodovým. Protože výpočet světelné křivky o 1000 bodech pro bodový zdroj trval přibližně 1,4 s, umožní kombinace integrace přes obrazy pro zdroje blízko kaustických křivek a aproximace bodovým zdrojem pro zdroje daleko od kaustik ještě zvýšit rychlost.

Tabulka 4.1: Číselné srovnání metod výpočtu světelných křivek (o 1000 bodech) pro křivky z Obrázku 4.2. V časech výpočtu  $\tau$  není zahrnuta doba strávená přípravou mapy zjasnění, respektive diskretizací kaustických křivek.

křivka	$\rho_*$	Ray shooting		Integrace přes obrazy		
		$\tau$ [s]	$\delta_{max}$	$\tau$ [s]	$\delta_{max}$	velikost pixelu ( $10^{-3}$ )
<b>1</b>	0,02	2,47	0,0043	2,16	0,0084	1,32
	0,04	4,34	0,0035	2,17	0,0081	2,50
<b>2</b>	0,02	2,48	0,019	2,34	0,019	1,47
	0,04	4,36	0,012	2,35	0,011	2,94
<b>3</b>	0,02	2,47	0,014	2,60	0,016	1,79
	0,04	4,36	0,0092	2,80	0,012	3,33
<b>4</b>	0,02	2,47	0,022	2,81	0,015	1,85
	0,04	4,36	0,025	2,96	0,015	3,85
<b>5</b>	0,02	2,47	0,0058	2,34	0,0081	1,35
	0,04	4,34	0,0060	2,30	0,0085	2,78

Tabulka 4.2: Číselné srovnání metod výpočtu světelných křivek (o 1000 bodech) pro křivky z Obrázku 4.3. V časech výpočtu  $\tau$  není zahrnuta doba strávená přípravou mapy zjasnění, respektive diskretizací kaustických křivek.

křivka	$\rho_*$	Ray shooting		Integrace přes obrazy		
		$\tau$ [s]	$\delta_{max}$	$\tau$ [s]	$\delta_{max}$	velikost pixelu ( $10^{-3}$ )
<b>a</b>	0,02	2,47	0,0053	4,35	0,017	2,04
	0,04	4,38	0,0033	4,97	0,017	4,00
<b>b</b>	0,02	2,47	0,025	4,01	0,018	1,79
	0,04	4,47	0,018	4,44	0,021	3,57

# Kapitola 5

## Závěr

V práci jsem implementoval a vyzkoušel dvě metody výpočtu světelných křivek dvojitých gravitačních mikročoček (ray shooting a integrace přes obrazy) pro zdroj s obecným rozložením intenzity na povrchu. Další dvě metody (integrace přes zdroj a pomocí Greenovy věty) jsem diskutoval a vyhodnotil, že nejsou vhodné pro zdroj s obecným rozložením intenzity.

Pro porovnání obou metod jsem zvolil pět testovacích trajektorií, z nichž dvě nepřecházejí kaustické křivky, jedna přechází pouze přes hrot kaustiky, jedna protíná kaustickou křivku ve dvou místech a jedna prochází přes hrot i dvě další místa kaustiky. Každá trajektorie byla probíhána dvěma zdroji s rozdílnými poloměry a lineárním okrajovým ztemněním. Dva kaustické přechody jsem studoval v detailu.

Výsledné rychlosti obou metod shrnuté v Tabulkách 4.1 a 4.2 jsou srovnatelné, ale po započtení času stráveného na přípravných činnostech jednoznačně vychází jako rychlejší integrace přes obrazy pro všechny studované trajektorie a velikosti zdrojů, stejně jako pro detailní studium kaustických přechodů.

Nejčastěji se světelné křivky počítají v rámci algoritmů na hledání parametrů čočky a zdroje z experimentálních dat, které většinou pracují iterativně a vyžadují výpočet velkého množství světelných křivek pro různé parametry. Pro tento úkol je integrace přes obrazy kombinovaná s aproximací bodovým zdrojem pro místa daleko od kaustických křivek výrazně vhodnější než ray shooting.

# Literatura

- Afonso, C., a kol. 2003, *Limits on Galactic Dark Matter with 5 Years of EROS SMC Data*, *Astronomy and Astrophysics*, **400**, 951–956
- An, J. H., a kol. 2002, *First Microlens Mass Measurement: PLANET Photometry of EROS BLG-2000-5*, *The Astrophysical Journal*, **572**, 521–539
- Beaulieu, J.-P., a kol. 2006, *Discovery of a cool planet of 5.5 Earth masses through gravitational microlensing*, *Nature*, **439**, 437–440
- Chang, K., & Refsdal, S. 1979, *Flux variations of QSO 0957+561 A, B and image splitting by stars near the light path*, *Nature*, **282**, 561–564
- Dominik, M. 1998, *A robust and efficient method for calculating the magnification of extended sources caused by gravitational lenses*, *Astronomy & Astrophysics*, **333**, L79–L82
- Einstein, A. 1916, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, *Annalen der Physik*, **49**, 769–822
- Einstein, A. 1936, *Lens-like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field*, *Science*, **84**, 506–507
- Evans, N. W. 2003, *Dogs that don't bark? (The tale of baryonic dark matter in galaxies)*, In *Proceedings of the Fourth International Workshop on the Identification of Dark Matter*, eds. N. J. C. Spooner & V. Kudryavtsev, 144–158
- Heyrovský, D. 2003, *Measuring stellar limb darkening by gravitational microlensing*, *The Astrophysical Journal*, **594**, 464–482
- Jaroszynski, M., a kol. 2005, *Mass Estimates for Some of the Binary Lenses in OGLE-III Database*, *Acta Astronomica*, **55**, 159–175
- Lynds, R., & Petrosian, V. 1989, *Luminous arcs in clusters of galaxies*, *The Astrophysical Journal*, **336**, 1–8

- Mao, S., & Paczyński, B. 1991, *Gravitational microlensing by double stars and planetary systems*, The Astrophysical Journal, **374**, L37–L34
- Mollerach, S., & Roulet, E. 2002, *Gravitational Lensing and Microlensing*, World Scientific, Singapore
- Paczynski, B. 1986, *Gravitational microlensing by the galactic halo*, The Astrophysical Journal, **304**, 1–5
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 2002, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, Cambridge
- Rattenbury, N. J., Bond, I. A., Skuljan, J., & Yock, P. C. M. 2002, *Planetary microlensing at high magnification*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **335**, 159–169
- Schneider, P., Ehlers, J., & Falco, E.E. 1992, *Gravitational lenses*, Springer-Verlag, Berlin
- Schneider, P., & Weiß, A. 1986, *The two-point-mass lens: detailed investigation of a special asymmetric gravitational lens*, Astronomy & Astrophysics, **164**, 237–259
- Shaw, J. R. 2004, *QuickFill: An efficient flood fill algorithm*, <http://www.codeproject.com/gdi/QuickFill.asp>
- Thomas, C. L., et al. 2005, *Galactic Bulge Microlensing Events from the MACHO Collaboration*, The Astrophysical Journal, **631**, 906–934
- Udalski, A., Szymanski, M., Mao, S., Di Stefano, R., Kaluzny, J., Kubiak, M., Mateo, M., & Krzeminski, W. 1994, *The optical gravitational lensing experiment: OGLE No. 7: Binary microlens or a new unusual variable?*, The Astrophysical Journal, **436**, L103–L106
- Van Hamme, W. 1993, *New limb-darkening coefficients for modeling binary star light curves*, The Astronomical Journal, **106**, 2096–2117
- Walsh, D., Carswell, R. F., & Weymann, R. J. 1979, *0957 + 561 A, B - Twin quasistellar objects or gravitational lens*, Nature, **279**, 381–384
- Zwicky, F. 1937, *Nebulae as Gravitational Lenses*, Physical Review, **51**, 290–290